…

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 marzo 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli.* Nota del Socio C. Segre.

1. Quando le rette dello spazio ordinario si rappresentano nel modo noto coi punti di una varietà quadratica R dello S_5, le sezioni di R coi piani di questo spazio sono imagini, in generale, di schiere di generatrici rettilinee di quadriche ordinarie; a meno che i piani giacciano in R, nel qual caso si ottengono le ordinarie stelle di raggi e i sistemi piani rigati.

Dirò, per brevità, *regolo* per significare « schiera di generatrici di una quadrica ordinaria »: includendo però nel concetto di *regolo* anche la detta degenerazione in stelle, o piani rigati.

Seguendo il metodo iperspaziale ora ricordato, ho potuto giungere, attraverso alla geometria dei piani di S_5, a risultati notevoli sulla geometria dei regoli, e quindi anche delle quadriche ordinarie.

In attesa della pubblicazione completa di queste ricerche, ne estraggo qui alcuni enunciati, omettendo le dimostrazioni.

2. Ricordiamo che i regoli sono ∞^9; e che in generale sono a coppie *incidenti*, cioè situati in una stessa quadrica.

Due regoli, che giacciano in una stessa congruenza lineare di rette, determinano un *fascio di regoli*: costituito da quei regoli della congruenza che han comuni le due rette (distinte o infinitamente vicine) d'intersezione dei due regoli dati. I regoli di un fascio stanno in generale su quadriche (di un fascio-schiera) passanti per uno stesso quadrilatero sghembo, di cui solo due lati opposti sono rette dei regoli.

Ciò premesso, chiamo *complesso lineare di regoli* un insieme algebrico di regoli, tale che in un fascio generico di regoli ve ne sia *uno* solo. Un tale insieme abbraccerà ∞^8 regoli.

I complessi lineari di regoli sono ∞^{19}.

3. Dato un complesso lineare di regoli, se di ogni suo regolo si prende il regolo incidente, si otterranno i regoli di un altro complesso lineare.

La coincidenza di un complesso lineare di regoli con quello che in tal modo gli è associato, avviene solo nei due casi particolari seguenti.

Si fissi una quadrica φ da considerarsi come *inviluppo*, od una f da riguardar come *luogo*. Le ∞^8 quadriche-luoghi armoniche a φ, o le ∞^8 quadriche-inviluppi armoniche a f, costituiscono un sistema lineare; sicchè in un fascio-schiera ve n'è in generale una sola. Ne segue che i regoli giacenti nelle quadriche dell'uno, oppure dell'altro sistema lineare, formano, secondo la definizione del n. 2, un complesso lineare.

Così le due specie diverse di sistemi lineari ∞^8 di quadriche, provenienti dal considerar le quadriche come superficie di 2° ordine, o come inviluppi di 2ª classe, vengono subordinate ad un unico concetto, molto più ampio: quello di complessi lineari di regoli.

Sono solo ∞^9, sì nell'una che nell'altra specie, questi particolari complessi, provenienti da sistemi lineari di quadriche.

4. Un altro esempio speciale di complessi lineari di regoli, dipendenti ancora da sole 9 costanti, si ha nell'insieme di tutti i regoli, ognun dei quali è in uno stesso complesso lineare di rette con un regolo fisso (*nucleo*).

5. Consideriamo un complesso lineare *generale* di regoli, $\boldsymbol{\Gamma}$. Ad esso si connettono strettamente (son forme invariantive) due quadriche f, φ.

La quadrica f è il luogo dei centri di quelle stelle che, riguardate come regoli (n. 1), fan parte di $\boldsymbol{\Gamma}$. Dualmente φ è l'inviluppo dei piani sostegni dei sistemi piani rigati che, come regoli, stanno in $\boldsymbol{\Gamma}$.

Si posson anche definire f e φ in quest'altro modo. Le quadriche di cui ambi i regoli stanno in $\boldsymbol{\Gamma}$ sono precisamente quelle ∞^7 che, come luoghi, sono armoniche ad una quadrica-inviluppo fissa φ, e come inviluppi sono armoniche ad una quadrica-luogo fissa f.

In altre parole, il dato complesso $\boldsymbol{\Gamma}$ (insieme col suo associato nel senso del principio del n. 3) appartiene sempre ad un *fascio di complessi* determinato da due complessi lineari armonici rispettivamente ad una quadrica-luogo e ad una quadrica-inviluppo (complessi particolari del n. 3).

Dirò f e φ gli *appoggi* di $\boldsymbol{\Gamma}$.

6. Sono pure determinati da $\boldsymbol{\Gamma}$ due regoli α, β, che chiamerò invece i *cardini* di $\boldsymbol{\Gamma}$.

In una congruenza lineare di rette stanno ∞^3 regoli; e se la congruenza è generica, solo ∞^2 di questi sono in $\boldsymbol{\Gamma}$. Ma esistono infinite congruenze lineari, che possiam chiamare *totali* per $\boldsymbol{\Gamma}$, nel senso che *ogni* loro regolo

appartiene a Γ. Queste congruenze si hanno da due determinati regoli α, β, così: son le congruenze lineari di rette, ognuna delle quali contiene due rette di α e due rette di β.

Si giunge anche ad α, β colla seguente proposizione. Il complesso dato Γ sta sempre in un fascio con due complessi della specie particolare definita al n. 4. I nuclei di questi due complessi saranno appunto α e β.

Indicherò con A, B le due quadriche (che suppongo non singolari) su cui stanno i regoli α, β.

7. I regoli α, β, e quindi anche le quadriche A, B, sono strettamente legati alle f, φ.

La f sta in un fascio di quadriche con A, B; e così φ sta nella schiera di quadriche determinata da A e B.

Per determinare il complesso Γ si posson prendere ad arbitrio i due regoli cardini α, β; e poi anche, entro al fascio AB, la quadrica d'appoggio (luogo) f, oppure, entro la schiera AB, la quadrica d'appoggio (inviluppo) φ. Con ciò Γ risulta individuato.

Si ha dunque, fra le quadriche del fascio e della schiera che son determinati dalle quadriche A, B di due dati regoli α, β, una corrispondenza biunivoca. Dette f e φ due quadriche omologhe, rispettivamente del fascio e della schiera, il loro legame (con α, β) si può esprimere così: per ogni coppia di rette incidenti di α e β, quella retta del loro fascio che è tangente ad f è pure tangente a φ.

8. Un'altra maniera di presentare la corrispondenza tra le f e le φ (di cui l'ultima proposizione può riguardarsi come un corollario) deriva dalla considerazione di quelle congruenze di rette, *totali* (n. 6) per Γ, che sono *speciali*.

Le direttrici di tali congruenze sono le ∞^3 rette di un complesso quadratico T di Battaglini. Se p è una di esse, la congruenza lineare speciale di cui è direttrice stabilisce fra i punti e i piani di p una corrispondenza proiettiva, che fa corrispondere ai quattro punti d'incontro di p con rette di α, β i quattro piani che congiungon p rispettivamente alle stesse rette ([1]). Orbene, in questa stessa proiettività ai punti d'incontro di p con f rispondono i piani tangenti a φ passanti per p.

Così, se per un punto qualunque P si tirano le ∞^1 rette del complesso quadratico T definito dall'incidenza sui due dati regoli α, β; e per ciascuna p di quelle ∞^1 rette si costruisce il piano π, che corrispoude a P nella proiettività che è data tra punti e piani di p; gli ∞^1 piani π saranno tutti

([1]) La proiettività così richiesta fra 4 punti e 4 piani di p è una condizione che può servire per definire il complesso T di Battaglini. Veggasi su questa definizione (*per incidenza su due regoli*) una mia Nota: *Sui complessi quadratici di rette del Battaglini*, Rendic. Circ. mat. di Palermo, t. 42 (1917).

tangenti ad una stessa quadrica φ della schiera AB; e questa φ non muterà se P si muoverà su una quadrica f del fascio AB.

9. Invece di partire dai due regoli cardini α, β (nn. 7 e 8), si può, per determinare il complesso Γ, partire dalle due quadriche d'appoggio f e φ, prese ad arbitrio.

Date f e φ, sono ancora ∞^1 (un fascio) i complessi lineari Γ. Le quadriche contenenti i loro cardini formano un sistema Σ, semplicemente infinito, ellittico, d'indici puntuale e planare 3; sistema che contiene f e φ, e che si può definire come l'insieme delle quadriche passanti per 8 punti O associati rispetto a un tetraedro (cioè fra loro omologhi nel G_8 di collineazioni involutorie definite dal tetraedro), e tangenti a 8 piani ω, pure associati rispetto a quel tetraedro. I punti O sono gli 8 punti di contatto di f con generatrici di φ; e dualmente i piani ω sono quei piani tangenti a φ che passan per le generatrici di f tangenti a φ. Due regoli α, β di quadriche di Σ si posson assumere come cardini di un complesso Γ (del fascio), quando le loro rette uscenti da un punto O sono in un piano con quella generatrice di φ che tocca f in O; o dualmente, scambiando fra loro f e φ, O e ω. Naturalmente, con tale scelta le quadriche A, B di α, β riesciranno in un fascio con f, e in una schiera con φ.

10. Quando si conoscano, per un complesso lineare di regoli Γ, sì i cardini α e β, che le quadriche di appoggio f e φ, la costruzione di Γ si farà facilmente, considerando Γ come comune ai due fasci di complessi definiti rispettivamente da α, β e da f, φ. (Ne deriva anzi qualche nuova relazione tra $\alpha, \beta, f, \varphi$).

Accennerò invece ad una costruzione di Γ, che si può fare quando son dati i due cardini α, β, e poi un regolo qualunque ε di Γ. Si considerino le ∞^2 congruenze lineari di rette, ognuna delle quali contiene una coppia di rette di ciascuno dei regoli $\alpha, \beta, \varepsilon$. (Si ottiene ogni congruenza siffatta, ad esempio, come intersezione dei complessi lineari di rette che congiungono α e β ad una coppia di rette di ε). Riguardando ciascuna congruenza come la base di un fascio di complessi lineari di rette, si pensi per ognuno di questi complessi il birapporto che con esso (come quarto elemento) determinano i tre complessi di quel fascio passanti per $\alpha, \beta, \varepsilon$. Tre qualunque complessi lineari di rette (rispettivamente per tre arbitrarie delle dette congruenze), ai quali spettino in tal modo dei birapporti, il cui prodotto sia uguale a 1, si taglieranno sempre in un regolo di Γ. E si otterranno così tutti gli ∞^8 regoli di Γ.

Astronomia. — *Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli.* Nota del Socio P. Pizzetti.

1. La interessante Nota del Consocio Cerulli: *Sulla determinazione della polodia* (1), mi offre occasione ad alcune osservazioni intorno al moto di rotazione di un corpo, in tutto, o in parte, rigido. Tali osservazioni sono in realtà di indole affatto elementare, ma avendo esse connessione con un problema molto importante e delicato qual'è quello degli spostamenti dei poli, non saranno forse ritenute inopportune.

L'errore, segnalato dal prof. Cerulli, del riportare tali e quali alla Sfera celeste (ossia agli assi cartesiani di direzione fissa nello spazio) le variazioni del polo terrestre, è evidente. Se un corpo nei successivi istanti $t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots$ ruota attorno alle rette $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, che supponiamo rigidamente connesse col corpo stesso, e le cui direzioni, al tempo t_1, sono rappresentate dai punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ della sfera celeste, il polo celeste all'epoca t_r non sarà già α_r, ma bensì quel punto che sulla sfera rappresenta la novella direzione assunta, nello spazio, dalla retta a_r per il complessivo effetto delle rotazioni avvenute nelle precedenti epoche $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}, \ldots$ Ed è chiaro che questo effetto può esser tale da riportare il polo celeste vicinissimo alla sua posizione iniziale α_1, ancor quando la retta a_r faccia un angolo non piccolo colla a_1. E viceversa può avvenire che l'effetto accumulato delle considerate rotazioni sposti di molto il polo celeste, ancorchè sia piccolissimo l'angolo fra le rette a_1, a_r. La cinematica ci dice soltanto che: se l'asse istantaneo di rotazione è di posizione invariabile rispetto al corpo (polo terrestre fisso), sarà pure tale rispetto alle direzioni fisse dello spazio (polo celeste fisso); ma non afferma che a piccole variazioni del polo terrestre corrispondano variazioni piccole dello stesso ordine nel polo celeste, o viceversa.

Esempî classici di discordanza, sotto questo aspetto, presentano due casi notissimi: 1°, quello del *ciclo Euleriano*, o moto periodico del polo terrestre dovuto ad eventuale non coincidenza iniziale dell'asse di rotazione con uno degli assi principali d'inerzia terrestri: al quale moto periodico, dato che esista, corrisponde una variazione, d'ordine estremamente più piccola, della direzione assoluta dell'asse, ossia del polo celeste; 2°, gli spostamenti notevoli del polo celeste che vanno sotto il nome di precessione e nutazione

(1) Questi Rendiconti, seduta 4 febbraio 1917.

luni-solare, ai quali corrisponde una variazione praticamente insensibile del polo terrestre.

2. Le relazioni fra le velocità di spostamento dei due poli possono stabilirsi come segue. Indichiamo con x_1, y_1, z_1, un sistema d'assi cartesiani invariabilmente legati alla parte solida del Globo, con x, y, z gli assi di direzione invariabile nello spazio. Colla consueta tabella

	x_1	y_1	z_1
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

esprimiamo i coseni di direzione dell'una terna rispetto all'altra. Detti (ξ, η, ζ), (ξ_1, ξ_2, ξ_3) i coseni di direzione dell'asse istantaneo di rotazione, al tempo t, rispetto alle due terne (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) rispettivamente, avremo:

$$\xi = \sum_i \alpha_i \xi_i \quad , \quad \eta = \sum_i \beta_i \xi_i \quad , \quad \zeta = \sum_i \gamma_i \xi_i$$

$(i = 1, 2, 3)$ e, colla derivazione rispetto a t:

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \sum_i \alpha_i \frac{d\xi_i}{dt} \quad , \quad \frac{d\eta}{dt} = \sum_i \beta_i \frac{d\xi_i}{dt} \quad , \quad \frac{d\zeta}{dt} = \sum_i \gamma_i \frac{d\xi_i}{dt} \, ,$$

annullandosi, per ovvie ragioni, nei secondi membri l'insieme dei termini che contengono le derivate degli $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ [1].

Assumiamo come postulati di fatto che, per tutto l'intervallo di tempo che si ha a considerare, siano piccolissimi gli spostamenti, sia del polo celeste rispetto alle stelle fisse, sia del polo terrestre rispetto alla Terra. Con ciò si potrà ritenere che facciano sempre angolo piccolissimo fra loro le tre rette z, z_1 e asse istantaneo, e ritenere quindi piccolissimi i coseni indicati con

$$\alpha_3 \, , \, \beta_3 \, , \, \gamma_1 \, , \, \gamma_2 \, , \, \xi_1 \, , \, \xi_2 \, , \, \xi \, , \, \eta \, .$$

Supporremo pure assai piccole le derivate $\dfrac{d\xi_i}{dt}$ e trascurabili i prodotti di

[1] Il punto che all'istante t trovasi sull'asse x a distanza 1 dall'origine delle coordinate, ha, in quell'istante, una velocità le cui componenti, rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 sono le derivate di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispetto a t. Ma la detta velocità è perpendicolare all'asse istantaneo. Quindi $\sum_i \xi_i \dfrac{d\alpha_i}{dt} = 0$

esse per i coseni ora menzionati. Nello stesso ordine di approssimazione, porremo nelle (1)

$$\alpha_1 = \cos\theta \ , \ \alpha_2 = -\operatorname{sen}\theta \ , \ \beta_1 = \operatorname{sen}\theta \ , \ \beta_2 = \cos\theta \, ,$$

ove θ è l'angolo fra il piano $z_1 x_1$ e il piano $z x$, oppure, sempre con la stessa approssimazione, il *tempo siderale* di un meridiano terrestre assegnato. Le due prime delle (1) potranno pertanto scriversi:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \cos\theta \frac{d\xi_1}{dt} - \operatorname{sen}\theta \frac{d\xi_2}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \operatorname{sen}\theta \frac{d\xi_1}{dt} + \cos\theta \frac{d\xi_2}{dt} \, . \end{aligned}$$

Qui, sempre nello stesso ordine d'approssimazione, ξ_1, ξ_2 possono rappresentare (a meno di un fattore costante) le due prime coordinate del polo terrestre rispetto agli assi terrestri, mentre ξ ed η esprimono le analoghe coordinate del polo celeste rispetto agli assi fissi.

Le formole (2) mettono in evidenza come le *velocità di variazione* dei due poli, terrestre e celeste, siano generalmente dello stesso ordine di grandezza. Ma nulla ne possiamo inferire, in generale, riguardo alla relazione di grandezza fra queste *variazioni*, per un intervallo finito di tempo, fino a che, per speciali condizioni imposte al problema, le equazioni della Meccanica non siano atte a darci il modo di variare, col tempo, della derivata del vettore *velocità angolare*, e quindi delle derivate di ξ_1, ξ_2, ξ_3.

3. Vi ha un caso in cui le (2) conducono ad una evidente conclusione: quello dei moti che possiamo dire *impulsivi*, ossia di quegli spostamenti del polo terrestre che possono essere dovuti a turbamenti improvvisi nel'assetto della corteccia terrestre (cataclismi). Tali moti si verificano in un tempo così breve, che nelle (2) si può ritenere θ costante e alle *derivate* sostituire le *variazioni finite* verificatesi nelle coordinate, del polo celeste (al 1° membro) e del terrestre (al 2° membro). Si ottiene così, con considerazioni elementari, quella conclusione alla quale si giunge di solito con calcoli assai complicati, che cioè *gli spostamenti del polo terrestre dovuti a fenomeni istantanei o cataclismi, si riproducono tali e quali nella posizione del polo celeste.* È il caso dello spostamento *par saccades* di cui discorre il dott. Roggero nella Memoria citata dal prof. Cerulli. Ma il limitarsi a considerare una tale specie di spostamenti conduce facilmente in errore.

4. Vogliamo qui indicare come, con un calcolo poco più che elementare, si possa, in casi particolari (che corrispondono probabilmente a fatti fisici assai comuni), mettere in evidenza il grado di mobilità del polo celeste di fronte a fenomeni che dànno migrazioni sensibili del polo terrestre.

Supponiamo, generalmente, variabili gli assi e i momenti principali di inerzia della Terra, considerando questa come composta di una parte rigida (alla quale si intendono connessi gli assi x_1, y_1, z_1) e di una parte variabile per effetto di maree, di fenomeni meteorici, sismici o simili.

Chiameremo A, B, C, D, E, F i consueti sei coefficienti d'inerzia rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 e supporremo sempre piccolissimi D, E, F e di pochissimo variabili A, B, C; e assai piccole pure si supporranno le componenti f, g, h della *quantità di moto areale nel moto relativo* della parte variabile rispetto agli assi mobili x_1, y_1, z_1. Dette $\omega, \pi, \chi, \varrho$, la grandezza e le componenti, secondo x_1, y_1, z_1, della velocità angolare nel moto rotatorio del sistema (x_1, y_1, z_1) (delle quali componenti supporremo, in accordo coi postulati stabiliti da principio, piccolissime le due prime, e la terza pressapoco eguale alla velocità del moto diurno), le componenti della quantità di moto areale del sistema rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 saranno

$$\begin{aligned} &A\pi - F\chi - E\varrho + f, \\ (3)\qquad &B\chi - D\varrho - F\pi + g, \\ &C\varrho - E\pi - D\chi + h. \end{aligned}$$

Se dunque indichiamo con K la grandezza della quantità di moto areale, e con *i una retta orientata secondo la direzione e il senso del vettore quantità di moto areale*, l'angolo γ fra la retta i e l'asse istantaneo (ossia fra la retta i cui coseni di direzione sono le quantità (3) divise per K e la retta i cui coseni sono π/ω, χ/ω, ϱ/ω) potrà dedursi dalla formola

$$\text{sen}^2\gamma = \frac{1}{K^2\omega^2}\left[\{(B\chi - D\varrho - F\pi + g)\varrho - (C\varrho - E\pi - D\chi + h)\chi\}^2 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \cdots\right],$$

dove i due termini non scritti si ottengono del primo con permutazione circolare nelle 4 terne (A, B, C) (D, E, F) (π, χ, ϱ) (f, g, h). Possiamo in ogni caso ritenere trascurabili i prodotti delle π, χ per le D, E, F, f, g, h, nonchè i quadrati e i prodotti delle π, χ e, nello stesso ordine di approssimazione, porre al denominatore $C\varrho$ in luogo di K. La precedente formola dà allora

$$(4)\qquad \text{sen}\,\gamma = \frac{1}{C\omega}\sqrt{[(B - C)\chi - D\varrho + g]^2 + [(C - A)\pi - E\varrho - f]^2}\,.$$

L'ordine di grandezza dei differenti termini che figurano sotto il segno radicale dipende naturalmente dalle ipotesi che si fanno sui movimenti delle masse fluide o, generalmente, sulle deformazioni cui si suppone soggetta la massa terrestre, e non è difficile, nei casi particolari, stabilire un limite superiore pei valori numerici dei termini stessi.

Supponiamo trascurabili $D.g, E, f$. La formola (4) dà allora

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{C\omega}\sqrt{(B-C)^2\chi^2 + (A-C)^2\pi^2}\,.$$

Se si considera che l'angolo γ_1 fra l'asse istantaneo e l'asse z_1 è dato dalla formola

$$\operatorname{sen}\gamma_1 = \frac{\sqrt{\pi^2+\chi^2}}{\omega}$$

e che, d'altra parte, i rapporti $\frac{B-C}{C}$, $\frac{A-C}{C}$ nel caso della Terra, sono assai piccoli (1), riesce manifesto che, in questo caso, l'angolo γ è piccolissimo di fronte a γ_1 e che per conseguenza, se piccoli sono gli spostamenti del polo terrestre, di un ordine assai più piccolo (possiamo dire trascurabili) risultano gli scostamenti del polo celeste da quel punto che, sulla sfera celeste, rappresenta il vettore quantità di moto areale, ossia la retta i dianzi nominata.

D'altra parte questa retta i riesce di *direzione invariabile* ogni qualvolta si trascuri l'azione delle forze esterne (praticamente, il momento delle attrazioni del Sole e della Luna rispetto all'origine delle coordinate). Comunque sia, non è difficile, *riferendosi agli assi fissi* x, y, z, stabilire un limite superiore delle variazioni che, in un limitato periodo di tempo, le dette forze esterne possono produrre nelle componenti della quantità di moto areale e quindi nella orientazione della retta i.

Stabiliti tali limiti, e ritenuto trascurabile nelle precedenti ipotesi l'angolo γ, riescono perfettamente stabiliti dei limiti entro cui, nel dato periodo di tempo, può oscillare il polo celeste.

(1) Questo è un dato di fatto che si deduce, com'è noto, dalla forma della superficie di livello terrestre.

Matematica. — *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota del Socio GIAN-ANTONIO MAGGI.

La teoria delle distorsioni elastiche, iniziata da Weingarten, cui ne è dovuto il concetto informatore [1], sviluppata e arricchita, fin dal principio, di copiosi e interessanti risultati da Volterra [2], coltivata, in seguito, con successo, sotto varî aspetti, credo non ingannarmi nell'affermare che conseguì il suo definitivo assetto soltanto coi recenti lavori di Somigliana [3].

Difatti, Weingarten, proponendo lo studio delle deformazioni di equilibrio elastico, provocate da discontinuità dello spostamento, ad una data superficie interna, stabilisce la condizione che, alla stessa superficie, siano continui i parametri di dilatazione (componenti di deformazione, caratteristiche di deformazione, ecc.)

$$
(1) \qquad x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}\,,\quad y_y = \frac{\partial \eta}{dy}\,,\quad z_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\,,
$$

$$
y_z = z_y = \frac{\partial \zeta}{dy} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\,,\quad z_x = x_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,,\quad x_y = y_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,,
$$

affinchè siano continue quelle ch'egli chiama t e n s i o n i. D'onde risulta che, per esse, si devono intendere i parametri di pressione (componenti di pressione, caratteristiche di pressione, ecc.)

$$
(2) \qquad X_x\,,\ Y_y\,,\ Z_z\,,\ Y_z = Z_y\,,\ Z_x = X_z\,,\ X_y = Y_x\,,
$$

funzioni lineari omogenee dei precedenti, che, alla lor volta, riescono funzioni lineari omogenee di essi.

Volterra definisce come deformazione regolare quella per cui, in tutto il campo rappresentato dal corpo elastico, le (1) « sono funzioni finite, continue e monodrome, aventi le derivate del primo e del secondo ordine pure

[1] *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Questi Rendiconti (5), X, 1° sem. 1901.

[2] Serie di Note in questi Rendiconti (5), XIV, 1° sem. 1905; *Sull'equilibrio dei corpi elastici molteplicemente connessi,* in Nuovo Cimento (5), X e XI, 1905-1906; *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes,* in Annales de l'École Normale (3), XXIV, 1907.

[3] *Sulla teoria delle distorsioni elastiche,* due Note, in questi Rendiconti (5), XXIII, 1° sem. 1914 e Nuovo Cimento (6), XI, 1916; *Sulle discontinuità dei potenziali elastici,* in Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, LI, 1915-16.

finite, continue e monodrome (¹); ed è codesta specie di deformazione che fa oggetto delle sue ricerche. Lo spostamento elastico, sotto queste condizioni, prescindendo dal caso che degeneri in spostamenti rigidi, è necessariamente continuo, in un campo semplicemente connesso. La monodromia è sempre da noi ammessa, quando non si affermi il contrario. Invece, in un campo molteplicemente connesso, può riuscire discontinuo, ad ogni superficie rappresentante un « diaframma », atto a diminuire l'ordine di connessione del campo; e la discontinuità risulta definita da uno spostamento rigido infinitesimale delle due faccie di un taglio, che s'immagini praticato lungo il diaframma, l'una per rispetto all'altra. La circostanza che alle superficie di discontinuità si possono assegnare le infinite posizioni diverse, assegnabili al corrispondente diaframma, senza mutare la distribuzione dei parametri di dilatazione, si traduce nella possibilità di rappresentare questo spostamento del corpo elastico sotto la forma di funzione continua e polidroma delle coordinate, attribuitagli da Volterra (²).

Quindi, adottando i termini di Somigliana di « spostamenti di Weingarten » e « spostamenti di Volterra » (³), codesti sono un caso particolare di quelli, a cui conferisce particolare interesse la natura della discontinuità, e l'indifferenza, almeno entro certi limiti, della posizione delle superficie a cui si verifica la discontinuità medesima.

Ora, il discorso con cui Weingarten accompagna la ricordata condizione, sembra affermare la necessità di essa pel mantenimento dell'integrità del corpo considerato (⁴). Laddove per ciò è puramente necessaria la continuità, attraverso la supposta superficie di discontinuità dello spostamento, della pressione specifica, in ogni punto della superficie medesima, relativa alla semiretta avente la direzione della normale, nello stesso punto, e un senso prestabilito (⁵). Vale a dire, non è necessaria, a tale scopo, la continuità

(¹) *Un teorema sulla teoria della elasticità.* Questi Rendiconti (5), X, 1° sem. 1905, e Cap. I, Art. I della citata Memoria nel Nuovo Cimento.

(²) Ved. la mia Nota, *Sugli spostamenti elastici discontinui*, in questi Rendiconti (5), XVII, 1° sem. 1908. Ivi ho procurato di dedurre, per la via che reputo più diretta, gli accennati risultati, appartenenti a Volterra. Colgo l'occasione per indicare a pag. 574, linea 17, la correzione di costanti in funzioni, che, del resto, si rileva dal seguito del testo; avvertendo, chi cercasse la ragione della differenza di comportamento delle p, q, r e delle ξ, η, ζ, che le circuitazioni relative alle prime preesistono all'applicazione dei diaframmi, mentre, soltanto dopo interrotti con questi i corrispondenti circuiti, si procede al calcolo delle seconde.

(³) « Se le tensioni che si hanno nell'interno sono continue in tutto lo spazio occupato dal corpo, esso avrà il carattere di un solo ed unico corpo: ma se le tensioni fossero discontinue ove gli spostamenti sono discontinui, il corpo dovrebbe ritenersi come avente il carattere di più corpi distinti ». Loc. cit.

(⁴) *Sulle deformazioni elastiche non regolari.* Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908.

(⁵) Ved. per es. i miei *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*, § 405.

delle (2), ma puramente delle

$$
(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}
X_n = X_x \cos \widehat{nx} + X_y \cos \widehat{ny} + X_z \cos \widehat{nz}, \\
Y_n = Y_x \cos \widehat{nx} + Y_y \cos \widehat{ny} + Y_z \cos \widehat{nz}, \\
Z_n = Z_x \cos \widehat{nx} + Z_y \cos \widehat{ny} + Z_z \cos \widehat{nz},
\end{array}\right.
$$

componenti della pressione specifica suddetta.

Così. gli stessi spostamenti di Weingarten non rappresentano, fra i possibili, che un caso assai particolare.

Il sostanziale progresso, che la teoria delle distorsioni elastiche deve a Somigliana, consiste nella introduzione della suddetta condizione necessaria, invece della condizione di Weingarten.

In tal modo, indicando con D la differenza dei limiti, col tendere del punto considerato ad un punto della superficie, dalla parte verso cui il senso della normale è preso come positivo e dalla parte opposta ($D = \lim\limits_{n>0} - \lim\limits_{n<0}$), per una determinata forma della discontinuità dello spostamento, si hanno, ad ogni superficie σ di discontinuità, le sei equazioni

$$(4)\qquad D\xi = \xi_\sigma, \qquad D\eta = \eta_\sigma, \qquad D\zeta = \zeta_\sigma,$$

$$(5)\qquad DX_z = 0, \qquad DY_z = 0, \qquad DZ_z = 0,$$

dove il punto limite è preso per origine e l'asse delle z è formato colla normale n, presa col senso positivo. Con che gli assi delle x e della y risultano tangenti alla superficie nello stesso punto limite, e le $\xi_\sigma, \eta_\sigma, \zeta_\sigma$ rappresentano funzioni note, a piacere, o di coordinate curvilinee appartenenti alla superficie, o delle x, y, dedotte, in questo caso, da funzioni note di x, y, z, col fare $z = 0$.

Somigliana dimostra, in primo luogo, — per ricordare soltanto i risultati che fanno al nostro scopo — come le sei equazioni (4), (5) valgano a determinare la discontinuità D di ciascuno dei sei parametri di dilatazione [1].

Dall'espressione di queste discontinuità si deducono poi le discontinuità delle derivate prime, rispetto alle coordinate, delle componenti dello spostamento, ξ, η, ζ, e da queste, col concorso delle equazioni dell'equilibrio, dove le forze limite (forze di massa) si suppongono nulle (o semplicemente continue alla superficie σ), le discontinuità delle derivate seconde delle stesse funzioni. Per cui Somigliana arriva a quest'altro risultato, sul quale particolarmente insistiamo, che, colle equazioni (4), tenuto conto delle (5) e delle equazioni dell'equilibrio elastico, sono determinate le discontinuità dei parametri di dilatazione, e quelle delle derivate prime e seconde delle componenti dello spostamento [2].

[1] Questi Rendiconti e Nuovo Cimento, 1ª Nota.

[2] Questi Rendiconti e Nuovo Cimento, 2ª Nota.

Si riconosce subito come, col concorso delle equazioni che si ottengono, derivando, membro a membro, le equazioni dell'equilibrio, rispetto alle singole coordinate, risultano determinate, allo stesso modo, le discontinuità delle derivate di ordine successivo delle componenti dello spostamento. È conseguenza di tutto ciò, che ci proponiamo qua di esaminare, è che le condizioni precedentemente enumerate, come quelle che, coi termini di Volterra, definiscono la deformazione regolare, si presentano come sovrabbondanti. Poichè, per quanto si è premesso, richiedono la continuità dei parametri di dilatazione e delle derivate prime e seconde dei parametri di dilatazione medesimi: e codesti risultano appartenere ad uno spostamento, provocato da discontinuità di forma prestabilita.

Questa forma, rappresentabile per mezzo di uno spostamento rigido delle due faccie di un taglio, praticato lungo la superficie di discontinuità, l'una per rispetto all'altra, rientra nel tipo che dà luogo agli spostamenti di Weingarten (1). Per cui si può asserire, senz'altro, la continuità dei parametri di dilatazione. Restano da esaminare le derivate prime e seconde, e passiamo ora a dimostrarne la continuità: ossia a dimostrare la continuità delle derivate delle componenti dello spostamento, fino a quelle di terzo ordine, donde essa, senz'altro, scaturisce. Nè credo che le conclusioni di Volterra, relative alla possibilità della deformazione d'equilibrio elastico in discorso, le quali, attraverso a non semplice calcolo, fanno capo ai teoremi di esistenza, applicati a deformazioni ausiliari (2), tolgano opportunità a questa verificazione diretta di una proprietà indispensabile, per impostare la teoria matematica di una specie di equilibrio elastico, che l'esperienza concorre a raccomandare alla nostra attenzione.

Manteniamo a x, y, z e a ξ, η, ζ il significato attribuitovi nelle (4) e (5), con cui gli assi delle x e delle y sono tangenti alla superficie σ, nel punto considerato, assunto come origine. Immaginiamo poi, al noto modo, una rete di linee coordinate, ortogonali, giacenti sulla superficie, e indichiamo con u e v i parametri variabili sulle linee delle due famiglie, che, colla loro mutua intersezione determinano i punti della superficie medesima: con che, al solito,

$$\mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

rappresenti il quadrato del differenziale di un arco, uscente dal punto (u, v).

Inteso che gli assi delle x e delle y siano rispettivamente tangenti alla prima e alla seconda delle indicate linee coordinate ($v =$ cost e

(1) Nota citata.

(2) *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi*. Questi Rendiconti (5), XIV, 1° sem. 1905, e Cap. II, Art. II, della citata Memoria nel Nuovo Cimento.

$u = \text{cost}$), si verificano le relazioni [1]

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial u} = \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v} = \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial y} .$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} &= E\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} &= G\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} &= \sqrt{EG}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} . \end{aligned} \right.$$

Indichiamo ora con φ una funzione di x, y, z o di u, v, n, come sono le ξ, η, ζ, alla quale attribuiamo le proprietà che possiedono queste funzioni, almeno in prossimità di σ, e poniamo

$$(8) \qquad \lim_{n>0} - \lim_{n<0} = D \quad , \quad D\varphi = \varphi_\sigma ,$$

con che φ_σ rappresenterà una funzione di u, v, o di x, y, da dedursi da una funzione di x, y, z, col farvi $z = 0$.

Rammentiamo la formola commutativa, dove la funzione φ s'intende soddisfare le condizioni occorrenti per la sua validità [2]

$$(9) \qquad D\,\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\,\partial u^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} D\varphi}{\partial u^\mu\,\partial v^\nu} .$$

Con questo, dalle (6) si ricavano

$$(10) \qquad D\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial \varphi}$$

$$(11) \qquad D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\,D\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad , \quad D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\,D\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} ,$$

e dalle (7)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial x^2} + \frac{1}{E}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta , \\ D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial y^2} + \frac{1}{G}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\delta , \qquad \delta = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial z} - D\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} , \\ D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,\delta , \end{aligned} \right.$$

[1] Cfr. la mia Nota, *Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni*. A pag. 189 del presente volume di questi Rendiconti.

[2] Ved. la suddetta mia Nota.

Prendiamo per φ le ξ, η, ζ. Colle (10) formiamo il salto delle loro derivate prime, rispetto alle coordinate tangenziali x e y.

Inteso poi il corpo isotropo, e cioè

$$X_x = -\lambda\varkappa - 2\mu x_x \quad , \quad Y_z = -\mu y_z \quad , \quad \varkappa = x_x + y_y + z_z ,$$

e formole analoghe, dove λ, μ indicano le « costanti d'elasticità », col concorso delle (5), invocando le (1), si trova subito (¹)

$$(13) \qquad D\frac{\partial\xi}{\partial z} = -\frac{\partial\zeta_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D\frac{\partial\eta}{\partial z} = -\frac{\partial\zeta_\sigma}{\partial y} \quad , \quad D\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\eta_\sigma}{\partial y}\right).$$

Introduciamo ora la forma particolare di discontinuità dello spostamento, a cui si riferisce il nostro discorso, e poniamo quindi

$$(14) \qquad \xi_\sigma = a + qz - ry \quad , \quad \eta_\sigma = b + rx - pz \quad , \quad \zeta_\sigma = c + py - qx$$
$$(z = 0) ,$$

dove, fissato il punto limite, a, b, c, p, q, r rappresentano altrettante costanti.

Ne vengono, per (10) e (13),

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} D\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = 0 \quad , & D\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = -r \quad , & D\dfrac{\partial\xi}{\partial z} = q , \\[2ex] D\dfrac{\partial\eta}{\partial x} = r \quad , & D\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \quad , & D\dfrac{\partial\eta}{\partial z} = -p , \\[2ex] D\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} = -q \quad ; & D\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} = p \quad , & D\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 . \end{array} \right.$$

Donde risulta nullo il salto di ciascuno dei parametri di dilatazione [cfr. (1)], conformemente al risultato già ricordato. Per le stesse (14), sono poi nulle tutte le derivate seconde di ξ_σ, η_σ, ζ_σ rispetto a x e a y Inoltre, per (14) e (15) si verifica, qualunque dello ξ, η, ζ sia rappresentata da φ,

$$(16) \qquad \delta = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial z} - D\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 ,$$

Ne segue, per (11) e (12), che risulta nullo il salto di tutte le derivate seconde di ξ, η, ζ, rispetto alle coordinate x, y, z, eccettuate, pel momento, $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$.

(¹) Somigliana: la prima delle citate Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.*

Per queste, rammentiamo le equazioni d'equilibrio

$$(17) \quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\varkappa}{\partial x}+\mu\Delta_2\xi+X=0\,, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\varkappa}{\partial y}+\mu\Delta_2\eta+Y=0\,, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\varkappa}{\partial z}+\mu\Delta_2\zeta+Z=0\,, \\ \varkappa=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\quad,\quad \Delta_2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \end{cases}$$

dove le X, Y, Z s'intenderanno continue sulla superficie σ.

Applicando la D a queste equazioni, diventano tre equazioni, che rispettivamente forniscono $D\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$, $D\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}$, $D\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$, come funzioni lineari omogenee delle D delle rimanenti derivate seconde delle ξ, η, ζ. Le quali sono tutte nulle, per modo che ne segue pure

$$(18) \qquad D\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=0\,.$$

Si conclude che è nullo il salto di tutte le derivate seconde delle ξ, η, ζ: e, per conseguenza, conformemente a (1), nullo il salto delle derivate prime dei parametri di dilatazione.

Per dimostrare che è nullo il salto delle derivate seconde degli stessi parametri di dilatazione, si dimostra, in modo analogo, che è nullo il salto di tutte le derivate terze delle ξ, η, ζ, rispetto alle coordinate x, y, z.

Serve perciò una serie di formole, che si stabiliscono, proseguendo il procedimento tenuto per formare le (10), (11), (12), nelle quali introdurremo, senz'altro, i precedenti risultati sul salto delle derivate seconde.

Collo stesso significato di φ, valendosi sempre della (9), si ricava, in primo luogo, dalle (6):

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad , \quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial y}D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,,$$

per cui

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial z^2}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\,\partial z^2}=0:$$

in secondo luogo, si ricava dalle (7):

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{E}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\delta',$$

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{G}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\delta', \qquad \delta'=\frac{\partial}{\partial z}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}-D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\delta',$$

per cui

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial z}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2\,\partial z}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0:$$

Per le rimanenti derivate terze, si comincia col trovare le formole che succedono alle (6) e (7). Si ottiene così, per esempio,

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3}=E\sqrt{E}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3\sqrt{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial u^3}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}.$$

Ne segue, valendosi della (9), e tenendo conto di (10), (11) e (12),

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=\frac{\partial^3\varphi_\sigma}{\partial x^3}+\frac{3}{E\sqrt{E}}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)\delta:$$

per cui, conformemente alle ipotesi e ai risultati precedenti,

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0.$$

E allo stesso modo si trova

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}=0.$$

Rimangono

$$D\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3} \quad , \quad D\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3} \quad , \quad D\frac{\partial^3\zeta}{\partial z^3}. \tag{19}$$

Per queste, deriveremo le tre equazioni di equilibrio (17), ordinatamente, rispetto a x, a y e a z; e supposte le $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ continue, alla superficie σ, applicheremo la D ai due membri delle equazioni così formate. Esse forniranno le (19) come funzioni lineari omogenee delle D delle derivate terze rimanenti delle stesse ξ, η, ζ. Le quali sono dimostrate tutte nulle. Per cui, finalmente, ne risultano pure

$$D\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3}=0 \quad , \quad D\frac{\partial^3\zeta}{\partial z^3}=0.$$

Meccanica. — *Sulla forma dello Sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità.* Nota del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Se dai valori che assume la gravità sulla superficie fisica della Terra, eseguite le opportune correzioni, si vuol dedurre la forma di una superficie regolare (Sferoide), la quale differisca pochissimo dal Geoide, si è condotti a prendere in esame il seguente problema:

Una massa limitata dalla superficie σ ruota, con velocità angolare costante ω, intorno ad un asse z. La superficie σ (che durante il movimento si suppone non subisca variazioni di forma) è una superficie di equilibrio; vale a dire il potenziale U della forza risultante della attrazione newtoniana dovuta alla massa stessa, e della forza centrifuga, è costante sopra σ. Nei punti di σ la grandezza della forza è espressa dalla formula

$$g = g_0 \{ 1 + \gamma \operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \gamma' \operatorname{sen}^2 2\varphi_1 \}, \tag{1}$$

ove g_0, γ e γ' denotano delle costanti, φ_1 è il complemento dell'angolo che la normale a σ, rivolta verso l'esterno, forma coll'asse z. La costante γ è piccolissima rispetto ad 1, la costante γ' piccolissima rispetto a γ, e precisamente dell'ordine di grandezza di γ^2. Diremo che γ è una quantità piccola del primo ordine, γ^2 del secondo, ecc. Oltre ai valori delle costanti g_0, γ, γ', noi supponiamo di conoscere la lunghezza $2\pi a$ della linea luogo dei punti di σ pei quali $\varphi_1 = 0$; quindi anche il valore della costante

$$\lambda = \frac{a\omega^2}{g_0}, \tag{2}$$

che si supporrà piccola del primo ordine. Con questi dati ci proponiamo di determinare la forma di σ, trascurando nella sua equazione, rispetto all'unità, i termini d'ordine superiore al secondo.

Il risultato a cui si perviene è questo. La superficie σ si può rappresentare mediante l'equazione

$$r = a \{ 1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi - \alpha' \operatorname{sen}^2 2\varphi \}, \tag{3}$$

r denotando la distanza di un punto qualunque P di σ da un punto fisso O dell'asse z, φ il complemento dell'angolo che il raggio vettore OP forma coll'asse stessa, α ed α' due costanti. Posto

$$\alpha_0 = \frac{5}{2}\lambda - \gamma,$$

si ha:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 - \dfrac{1}{42}(61\,\alpha_0\lambda - 2\,\alpha_0^2 + 16\,\gamma'), \\ \alpha' = \dfrac{1}{24}(10\,\alpha_0^2 - 5\,\alpha_0\lambda - 8\,\gamma') \end{cases}$$ [1].

Se trascuriamo anche le quantità del secondo ordine avremo $\alpha' = 0$, ed $\alpha = \alpha_0$, ossia

$$\alpha = \frac{5}{2}\lambda - \gamma,$$

nota formula dovuta al Clairaut.

Per la Terra, ritenendo

$$\lambda = 0{,}0034672,$$

$$\gamma = 0{,}005302 \quad , \quad \gamma' = -\,0{,}000007,$$

si trova:

$$\alpha_0 = 0{,}003366,$$

$$\alpha = 0{,}0033523 = \frac{1}{298{,}3} \quad , \quad \alpha' = 0{,}0000046.$$

2. Sia V il potenziale newtoniano della massa rotante. Il potenziale totale sarà

$$(5)\qquad U = V + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi.$$

Sulla superficie σ deve essere

$$U = \text{cost.}$$

e, detta n la normale esterna,

$$g = -\frac{\partial U}{\partial n} = g_0 \{1 + \gamma \operatorname{sen}^2\varphi_1 + \gamma' \operatorname{sen}^2 2\varphi_1\}.$$

Il procedimento che seguiremo consisterà nell'assegnare al potenziale V un'espressione particolare, in cui interverranno delle costanti da determinarsi, e nel mostrare come a queste costanti, e a quelle che figurano nella equazione (3) di σ, si possano attribuire valori tali da soddisfare alle condizioni richieste.

Osserviamo perciò che le funzioni

$$\frac{1}{r}\,,\ \frac{1}{r^3}(1 - 3\operatorname{sen}^2\varphi)\ ,\ \frac{1}{r^5}(3 - 30\operatorname{sen}^2\varphi + 35\operatorname{sen}^4\varphi),$$

[1] L'Helmert (*Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, Vol. II, Cap. 2°) esamina questo stesso problema, ma non arriva alle formole (4). Del resto il metodo che io seguo non differisce sostanzialmente da quello dell'Helmert.

come è noto dalla teoria delle funzioni sferiche, presentano in tutto lo spazio, esclusa una regione qualunque S che contenga il punto O ($r=0$), i caratteri di potenziali di masse contenute in S. Lo stesso avverrà di ogni loro funzione lineare omogenea a coefficienti costanti: quindi della funzione:

$$(6) \quad V = ag_0 \left\{ (1+\eta)\frac{a}{r} + \zeta \frac{a^3}{r^3}(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi) + \right.$$

$$\left. + \zeta' \frac{a^5}{r^5}(3 - 30\,\mathrm{sen}^2\varphi + 35\,\mathrm{sen}^4\varphi) \right\} .$$

ove η, ζ, ζ' denotino delle costanti. Supporremo η e ζ del primo, ζ' del secondo ordine [1]. Sia questa, sulla superficie che limita la massa rotante, e nello spazio esterno, il suo potenziale newtoniano.

Sostituendo questa espressione di V nella formula (5), che, tenendo conto della (2), possiamo scrivere

$$U = V + ag_0 \cdot \frac{\lambda}{2}\frac{r^2}{a^2}(1 - \mathrm{sen}^2\varphi) ,$$

avremo:

$$(7) \quad U = ag_0 \left\{ \frac{a}{r} + \eta\frac{a}{r} + \zeta\frac{a^3}{r^3}(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi) + \right.$$

$$\left. + \zeta' \frac{a^5}{r^5}(3 - 30\,\mathrm{sen}^2\varphi + 35\,\mathrm{sen}^4\varphi) + \frac{\lambda}{2}\frac{r^2}{a^2}(1 - \mathrm{sen}^2\varphi) \right\} .$$

Consideriamo una superficie σ rappresentata dall'equazione

$$r = a\{1 - \beta\,\mathrm{sen}^2\varphi - \beta'\,\mathrm{sen}^4\varphi\} ,$$

ove β denoti una costante del primo, β' una costante del secondo ordine; e cerchiamo, per i punti di questa superficie, l'espressione del potenziale U in funzione dell'angolo φ, trascurando i termini d'ordine superiore al secondo.

Per ν intero, positivo o negativo, si ha dalla formula precedente, in quest'ordine di approssimazione,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\nu = 1 - \nu(\beta\,\mathrm{sen}^2\varphi + \beta'\,\mathrm{sen}^4\varphi) + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\beta^2\,\mathrm{sen}^4\varphi ,$$

ovvero:

$$(8) \quad \frac{r^\nu}{a^\nu} = 1 - \nu\beta\,\mathrm{sen}^2\varphi + \left\{ \frac{\nu(\nu-1)}{2}\beta^2 - \nu\beta' \right\}\mathrm{sen}^4\varphi .$$

In particolare, per $\nu = -1$,

$$\frac{a}{r} = 1 + \beta\,\mathrm{sen}^2\varphi + (\beta^2 + \beta')\,\mathrm{sen}^4\varphi .$$

[1] Tutte le costanti del secondo ordine sono in questa Nota contrassegnate con un apice.

Questa espressione di $\frac{a}{r}$ la sostituiremo, nella formula (7). al primo termine entro le grandi parentesi. Nel secondo, terzo ed ultimo termine, a causa dei fattori piccoli del primo ordine η, ζ, λ, potremo, ad $\frac{a}{r}, \frac{a^3}{r^3}, \frac{r^2}{a^2}$, sostituire i valori dati dalla formula generale (8) trascurando anche il termine in $\operatorname{sen}^4\varphi$ che è del secondo ordine; ossia ritenere

$$\frac{a}{r} = 1 + \beta \operatorname{sen}^2\varphi \ , \ \frac{a^3}{r^3} = 1 + 3\beta \operatorname{sen}^2\varphi \ , \ \frac{r^2}{a^2} = 1 - 2\beta \operatorname{sen}^2\varphi .$$

E finalmente nel termine che contiene il fattore del secondo ordine ζ' potremo porre $r = a$. Avremo pertanto nei punti di σ:

$$\begin{aligned} \mathrm{U} = a g_0 \Big\{ & 1 + \beta \operatorname{sen}^2\varphi + (\beta^2 + \beta') \operatorname{sen}^4\varphi + \eta(1 + \beta \operatorname{sen}^2\varphi) + \\ & + \zeta(1 + 3\beta \operatorname{sen}^2\varphi)(1 - 3\operatorname{sen}^2\varphi) + \zeta'(3 - 30 \operatorname{sen}^2\varphi + 35 \operatorname{sen}^4\varphi) + \\ & + \frac{\lambda}{2}(1 - 2\beta \operatorname{sen}^2\varphi)(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) \Big\} ; \end{aligned}$$

ovvero, eseguendo i prodotti e ordinando,

$$\begin{aligned} \mathrm{U} = a g_0 \Big\{ & 1 + \eta + \zeta + 3\zeta' + \frac{\lambda}{2} + \\ & + \left(\beta + \beta\eta + 3\beta\zeta - 3\zeta - 30\zeta' - \frac{\lambda}{2} - \beta\lambda\right) \operatorname{sen}^2\varphi + \\ & + (\beta^2 + \beta' - 9\beta\zeta + 35\zeta' + \beta\lambda) \operatorname{sen}^4\varphi \Big\} . \end{aligned}$$

Poniamo la condizione che sulla superficie σ U sia costante. Dovranno annullarsi i coefficienti di $\operatorname{sen}^2\varphi$ e $\operatorname{sen}^4\varphi$, ossia dovrà essere:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \beta + \beta\eta + 3\beta\zeta - 3\zeta - 30\zeta' - \frac{\lambda}{2} - \beta\lambda = 0 , \\ & \beta^2 + \beta' - 9\beta\zeta + 35\zeta' + \beta\lambda = 0 . \end{aligned} \right.$$

3. Consideriamo ora, sulla superficie σ, la gravità g; e da prima la proiezione della gravità sul raggio vettore, ossia

$$g_r = - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} .$$

Sostituendo ad U la sua espressione (7) abbiamo:

$$\begin{aligned} g_r = g_0 \Big\{ & \frac{a^2}{r^2} + \eta \frac{a^2}{r^2} + 3\zeta \frac{a^4}{r^4}(1 - 3\operatorname{sen}^2\varphi) + \\ & + 5\zeta' \frac{a^6}{r^6}(3 - 30 \operatorname{sen}^2\varphi + 35 \operatorname{sen}^4\varphi) - \lambda \frac{r}{a}(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) \Big\} . \end{aligned}$$

Su questa formula eseguiremo operazioni analoghe a quelle eseguite sulla (7). Alle potenze di $\frac{r}{a}$ sostituiremo i valori ricavati dalla formula (8), trascurando i termini che moltiplicati per $\eta, \zeta, \zeta', \lambda$ darebbero luogo a termini d'ordine superiore al secondo; otterremo così:

$$g_r = g_0 \{ 1 + 2\beta \operatorname{sen}^2\varphi + (3\beta^2 + 2\beta') \operatorname{sen}^4\varphi + \eta(1 + 2\beta \operatorname{sen}^2\varphi) + \\ + 3\zeta(1 + 4\beta \operatorname{sen}^2\varphi)(1 - 3 \operatorname{sen}^2\varphi) + \\ + 5\zeta'(3 - 30 \operatorname{sen}^2\varphi + 35 \operatorname{sen}^4\varphi) - \lambda(1 - \beta \operatorname{sen}^2\varphi)(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) \} ;$$

eseguendo poi i prodotti e ordinando, avremo:

$$(10) \quad g_r = g_0 \{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \\ + (2\beta + 2\beta\eta - 9\zeta + 12\beta\zeta - 150\zeta' + \lambda + \beta\lambda) \operatorname{sen}^2\varphi + \\ + (3\beta^2 + 2\beta' - 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \operatorname{sen}^4\varphi \} .$$

Veniamo a considerare g. Detto ε, in un punto qualunque P di σ, l'angolo che la normale esterna forma col raggio vettore, sarà

$$g = \frac{g_r}{\cos\varepsilon} .$$

Ora si ha in generale

$$\operatorname{tag}\varepsilon = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} ;$$

e nel nostro caso, per la formola (3);

$$\operatorname{tag}\varepsilon = \frac{a}{r} \{ 2\beta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + 4\beta' \operatorname{sen}^3\varphi \cos\varphi \} .$$

Trascurando quantità d'ordine superiore al secondo, potremo ritenere

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tag}^2\varepsilon \quad , \quad \frac{1}{\cos\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tag}^2\varepsilon ,$$

quindi

$$g = g_r\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tag}^2\varepsilon\right) ;$$

e in $\operatorname{tag}\varepsilon$ potremo trascurare i termini d'ordine superiore al primo, ossia tralasciare il termine che contiene il fattore β' e supporre $r = \alpha$. Avremo così

$$\operatorname{tag}\varepsilon = 2\beta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = \beta \operatorname{sen} 2\varphi ,$$

$$g = g_r\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi\right) .$$

A g_r dobbiamo sostituire la sua espressione data dalla formula (10). Ma notiamo che i termini di g_r del 1° e del 2° ordine, moltiplicati per $1 + \frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi$, variano di quantità trascurabili. Basterà dunque moltiplicare per questo fattore, entro le grandi parentesi, il solo termine 1, ossia aggiungere $\frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi$. Nell'ultimo termine sostituiremo, poi a $\operatorname{sen}^4 \varphi$, la quantità identicamente uguale $\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\varphi$. In tal modo otterremo:

$$g = g_0 \Big\{ 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda +$$
$$+ (2\beta + 2\beta\eta - 9\zeta + 12\beta\zeta - 150\zeta' + \lambda + \beta\lambda) \operatorname{sen}^2 \varphi +$$
$$- (3\beta^2 + 2\beta' - 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \left(\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\varphi\right) \Big\} ;$$

e ordinando:

$$g = g_0 \Big\{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \tag{11}$$
$$+ (2\beta + 3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 9\zeta - 24\beta\zeta + 25\zeta' + \lambda) \operatorname{sen}^2 \varphi -$$
$$- \frac{1}{4}(\beta^2 + 2\beta' + 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \operatorname{sen}^2 2\varphi \Big\} .$$

Finalmente in questa formula, invece dell'angolo φ, faremo comparire l'angolo $\varphi_1 = \varphi + \varepsilon$. Nel termine che contiene $\operatorname{sen}^2 2\varphi$, a causa del fattore del secondo ordine, potremo sostituire senz'altro φ con φ_1. Nel termine che contiene $\operatorname{sen}^2 \varphi$ basterà calcolare $\operatorname{sen}^2 \varphi$ trascurando le quantità d'ordine superiore al primo. In questo ordine d'approssimazione abbiamo

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \varphi_1 - \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen} \varphi_1 - \cos \varphi_1 \operatorname{tag} \varepsilon ,$$
$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{sen}^2 \varphi_1 - 2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1 \operatorname{tag} \varepsilon = \operatorname{sen}^2 \varphi_1 - \operatorname{sen} 2\varphi_1 \operatorname{tag} \varepsilon .$$
$$\operatorname{tag} \varepsilon = \beta \operatorname{sen} 2\varphi = \beta \operatorname{sen} 2\varphi_1 ,$$

quindi

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{sen}^2 \varphi_1 - \beta \operatorname{sen}^2 2\varphi_1 .$$

Sostituendo nella formula (11) avremo:

$$g = g_0 \Big\{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda +$$
$$+ (2\beta + 3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 9\zeta - 24\beta\zeta + 25\zeta' + \lambda)(\operatorname{sen}^2 \varphi_1 - \beta \operatorname{sen}^2 2\varphi_1) -$$
$$- \frac{1}{4}(\beta^2 + 2\beta' - 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \operatorname{sen}^2 2\varphi_1 \Big\} ;$$

da cui, ordinando e trascurando la parte del terzo ordine

$$-\beta(3\beta^2+2\beta'+2\beta\eta-24\beta\zeta+25\zeta')$$

del coefficiente di $\mathrm{sen}^2 2\varphi_1$:

$$g=g_0\Big\{1+\eta+3\zeta+15\zeta'-\lambda+$$
$$+(2\beta+3\beta^2+2\beta'+2\beta\eta-9\zeta-24\beta\zeta+25\zeta'+\lambda)\,\mathrm{sen}^2\varphi_1-$$
$$-\frac{1}{4}(9\beta^2+2\beta'-72\beta\zeta+175\zeta'+3\beta\lambda)\,\mathrm{sen}^2 2\varphi_1\Big\}.$$

Noi vogliamo che questo valore di g risulti identicamente uguale a quello dato dalla formula

$$g=g_0\{1+\gamma\,\mathrm{sen}^2\varphi_1+\gamma'\,\mathrm{sen}^2 2\varphi_1\}.$$

Ciò richiede che sia:

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}&\eta+3\zeta+15\zeta'-\lambda=0\\&2\beta+3\beta^2+2\beta'+2\beta\eta-9\zeta-24\beta\zeta+25\zeta'+\lambda=\gamma.\\&9\beta^2+2\beta'-72\beta\zeta+175\zeta'+3\beta\lambda=-4\gamma'.\end{aligned}\right.$$

4. Abbiamo così ottenute cinque equazioni, le due (9) e le tre (12), contenenti le cinque incognite

$$\beta\,,\ \beta'\,,\ \eta\,,\ \zeta\,,\ \zeta'.$$

Ma alle β,β' conviene sostituire due nuove incognite α,α', ponendo

$$\beta=\alpha+4\alpha'\quad,\quad\beta'=-4\alpha'.$$

L'equazione di σ,

$$r=a\{1-\beta\,\mathrm{sen}^2\varphi-\beta'\,\mathrm{sen}^4\varphi\},$$

tenendo conto della identità

$$\mathrm{sen}^4\varphi=\mathrm{sen}^2\varphi-\frac{1}{4}\mathrm{sen}^2 2\varphi,$$

assume allora la forma

$$r=a\{1-\alpha\,\mathrm{sen}^2\varphi-\alpha'\,\mathrm{sen}^2 2\varphi\}$$

in cui α rappresenta lo schiacciamento di σ.

Notiamo che essendo α' del secondo ordine, nei termini $\beta\lambda$, $\beta\eta$, $\beta\zeta$ delle equazioni (9) e (12) possiamo sostituire β con α (anzichè con $\alpha + 4\alpha'$. Avremo pertanto le cinque equazioni:

$$\alpha + 4\alpha' + \alpha\eta + 3\alpha\zeta - 3\zeta - 30\zeta' - \frac{\lambda}{2} - \alpha\lambda = 0\,,$$
$$\alpha^2 - 4\alpha' - 9\alpha\zeta + 35\zeta' + \alpha\lambda = 0\,,$$
$$\eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda = 0\,,$$
$$2\alpha + 3\alpha^2 + 2\alpha\eta - 9\zeta - 24\alpha\zeta + 25\zeta' + \lambda = \gamma\,,$$
$$9\alpha^2 - 8\alpha' - 72\alpha\zeta + 175\zeta' + 3\alpha\lambda = -4\gamma'\,,$$

contenenti le cinque incognite

$$\alpha\,,\ \alpha'\,,\ \eta\,,\ \zeta\,,\ \zeta'\,.$$

Questo sistema di equazioni, delle quali solo la terza è lineare, dobbiamo risolverlo trascurando le quantità d'ordine superiore al secondo. Scriveremo perciò le equazioni stesse nel modo seguente, portando nei secondi membri i termini noti e tutti i termini che contengono prodotti o quadrati:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha + 4\alpha' - 3\zeta - 30\zeta' &= \frac{\lambda}{2} + \alpha\lambda - \alpha\eta - 3\alpha\zeta\,,\\ 4\alpha' - 35\zeta' &= \alpha^2 + \alpha\lambda - 9\alpha\zeta\,,\\ \eta + 3\zeta + 15\zeta' &= \lambda\,,\\ 2\alpha - 9\zeta + 25\zeta' &= \gamma - \lambda - 3\alpha^2 - 2\alpha\eta + 24\alpha\zeta\,,\\ 8\alpha' - 175\zeta' &= 4\gamma' + 9\alpha^2 + 3\alpha\lambda - 72\alpha\zeta\,. \end{aligned}\right.$$

Trascuriamo da prima, nei secondi membri, anche i termini del secondo ordine; e diciamo

$$\alpha_0\,,\ \alpha'_0\,,\ \eta_0\,,\ \zeta_0\,,\ \zeta'_0$$

i valori che assumono allora le cinque incognite; ossia scriviamo le equazioni:

$$\alpha_0 + 4\alpha'_0 - 3\zeta_0 - 30\zeta'_0 = \frac{\lambda}{2}\,,$$
$$4\alpha'_0 - 35\zeta'_0 = 0\,,$$
$$\eta_0 + 3\zeta_0 + 15\zeta'_0 = \lambda\,,$$
$$2\alpha_0 - 9\zeta_0 + 25\zeta'_0 = \gamma - \lambda\,,$$
$$8\alpha'_0 - 175\zeta'_0 = 0\,.$$

Dalla seconda e dalla quinta si ricava

$$\alpha'_0 = 0\quad,\quad \zeta'_0 = 0\,;$$

onde le tre rimanenti diventano

$$\alpha_0 - 3\zeta_0 = \frac{\lambda}{2},$$

$$\eta_0 + 3\zeta_0 = \lambda,$$

$$2\alpha_0 - 9\zeta_0 = \gamma - \lambda,$$

e risolute dànno

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{5}{2}\lambda - \gamma, \\ \eta_0 = \gamma - \lambda \quad , \quad \zeta_0 = \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\gamma. \end{array} \right.$$

Questi valori $\alpha_0, \ldots \zeta'_0$ delle incognite $\alpha, \ldots \zeta'$ saranno esatti *a meno di quantità del secondo ordine*; e per conseguenza nei termini $\alpha^2, \alpha\lambda, \alpha\eta, \alpha\zeta$ dei secondi membri delle equazioni (13), ad α, η, ζ potremo sostituire $\alpha_0, \eta_0, \zeta_0$, venendosi con ciò a trascurare quantità *d'ordine superiore al secondo*. Otterremo in tal modo le equazioni

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 4\alpha' - 3\zeta - 30\zeta' = \frac{\lambda}{2} + \alpha_0\lambda - \alpha_0\eta_0 - 3\alpha_0\zeta_0, \\ 4\alpha' - 35\zeta' = \alpha_0^2 + \alpha_0\lambda - 9\alpha_0\zeta_0, \\ \eta + 3\zeta + 15\zeta' = \lambda, \\ 2\alpha - 9\zeta + 25\zeta' = \gamma - \lambda - 3\alpha_0^2 - 2\alpha_0\eta_0 + 24\alpha_0\zeta_0, \\ 8\alpha' - 175\zeta' = 4\gamma' + 9\alpha_0^2 + 3\alpha_0\lambda - 72\alpha_0\zeta_0, \end{array} \right.$$

tutte lineari rispetto alle incognite del problema, i secondi membri essendo ora noti.

Se ad $\alpha_0, \eta_0, \zeta_0$ sostituiamo i loro valori dati dalle formule (14), e risolviamo le equazioni (15), avremo le cinque incognite $\alpha, \ldots \zeta'$ espresse in funzioni delle tre costanti note λ, γ, γ'. Si ottengono formule più semplici facendo intervenire la costante α_0, invece della γ, mediante la relazione

$$\gamma = \frac{5}{2}\lambda - \alpha_0,$$

che è la prima delle (14). Le altre due diverranno, sostituendo a γ questa sua espressione,

$$\eta_0 = \frac{3}{2}\lambda - \alpha_0 \quad , \quad \zeta_0 = \frac{1}{3}\alpha_0 - \frac{1}{6}\lambda.$$

A γ, η_0, ζ_0, nei secondi membri delle (15), dobbiamo dunque sostituire

questi loro valori. Con semplici riduzioni avremo:

$$\alpha + 4\alpha' - 3\zeta - 30\zeta' = \frac{\lambda}{2},$$

$$4\alpha' - 35\zeta' = -2\alpha_0^2 + \frac{5}{2}\alpha_0\lambda,$$

$$\eta + 3\zeta + 15\zeta' = \lambda,$$

$$2\alpha - 9\zeta + 25\zeta' = \frac{3}{2}\lambda - \alpha_0 + 7\alpha_0^2 - 7\alpha_0\lambda,$$

$$8\alpha' - 175\zeta' = 4\gamma' - 15\alpha_0^2 + 15\alpha_0\lambda.$$

Risolvendo questo sistema di equazioni lineari si ottiene, come è facile verificare,

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{21}\alpha_0^2 - \frac{61}{42}\alpha_0\lambda - \frac{8}{21}\gamma',$$

$$\alpha' = \frac{5}{12}\alpha_0^2 - \frac{5}{24}\alpha_0\lambda - \frac{1}{3}\gamma',$$

$$\eta = \frac{3}{2}\lambda - \alpha_0 - \frac{1}{7}\alpha_0^2 + \frac{6}{7}\alpha_0\lambda + \frac{8}{7}\gamma',$$

$$\zeta = -\frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{3}\alpha_0 - \frac{10}{21}\alpha_0^2 + \frac{4}{21}\alpha_0\lambda - \frac{4}{21}\gamma',$$

$$\zeta' = \frac{11}{105}\alpha_0^2 - \frac{2}{21}\alpha_0\lambda - \frac{4}{105}\gamma'.$$

I valori delle costanti α ed α' sono gli stessi che abbiamo riportato nel § 1. I valori delle tre rimanenti, che intervengono nella formula (6), fanno conoscere, nel grado di approssimazione a cui ci siamo attenuti, il potenziale del sistema.

E. M.